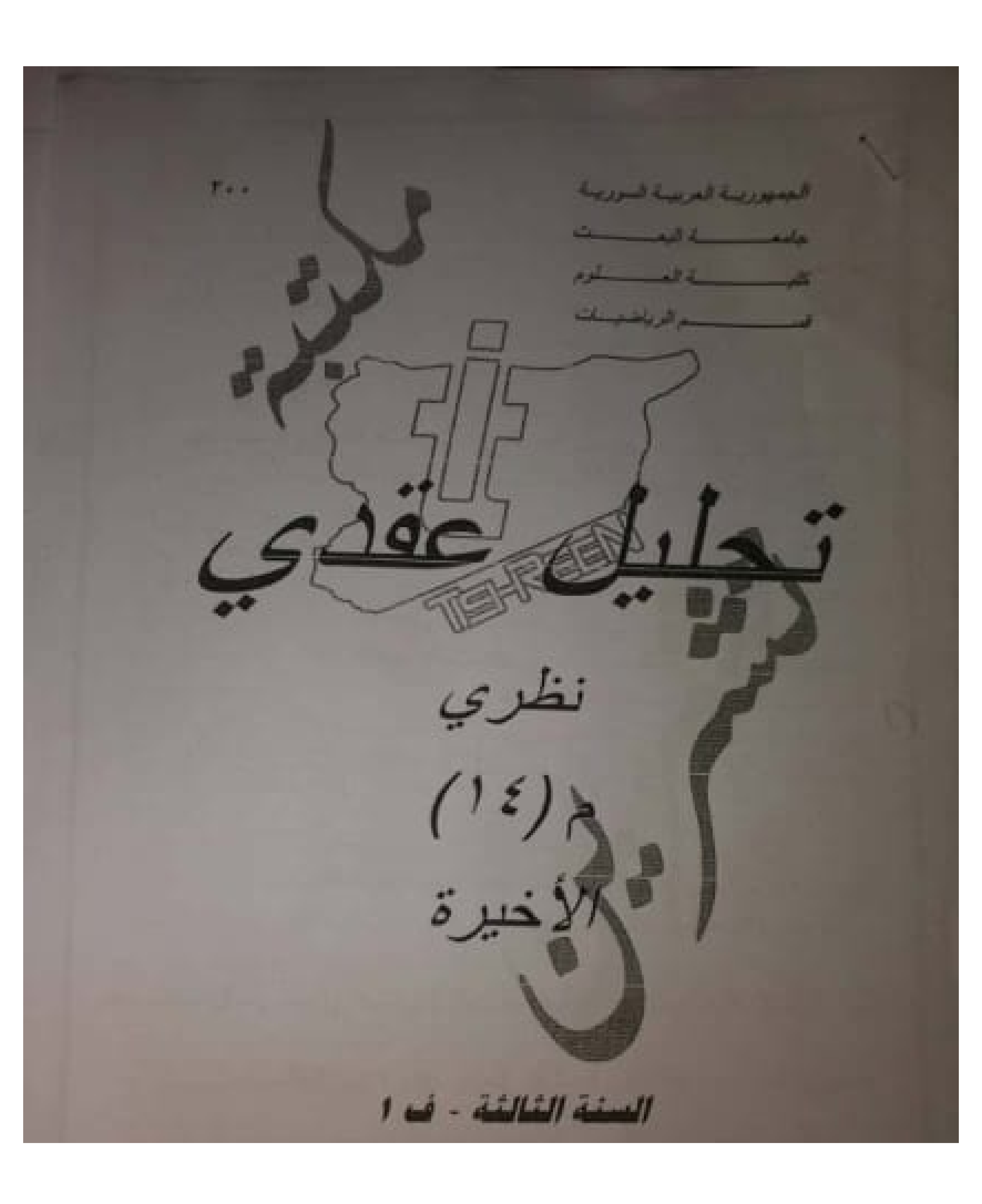


٢٠٠

الجمهورية العربية السورية

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

تحليل عقدي

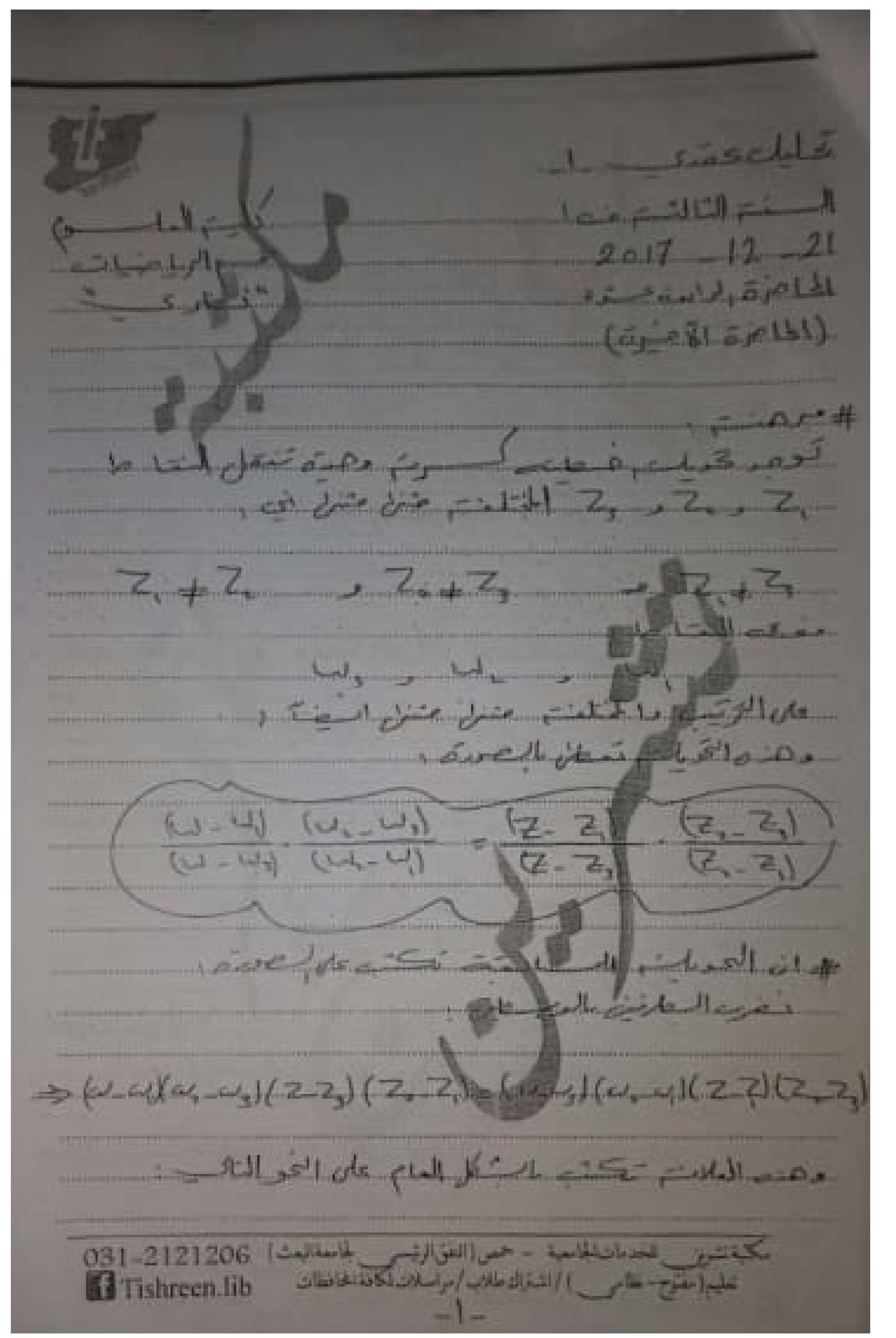
نظري

م (١٤)

الأخيرة

السنة الثالثة - ف ١

Scanned by CamScanner



تحليل عقدي ١

السنة الثالثة عملي

2017 - 12 - 21

المحاضرة الرابعة عشرة

(المحاضرة الأخيرة)

كلية العلوم

قسم الرياضيات

تشرين

مبرهنة:

توجد تحويلة خطية كسرية وحيدة تحول النقاط z_1 و z_2 و z_3 المختلفة مثنى مثنى في:

$z_1 \to w_1$ و $z_2 \to w_2$ و $z_3 \to w_3$

مع العلم أن

w_1 و w_2 و w_3

على الترتيب المختلفة مثنى مثنى أيضاً، وهذه التحويلة تعطى بالعلاقة:

$$\frac{(w-w_1)}{(w-w_2)}\cdot\frac{(w_3-w_2)}{(w_3-w_1)} = \frac{(z-z_1)}{(z-z_2)}\cdot\frac{(z_3-z_2)}{(z_3-z_1)}$$

إن العلاقة السابقة تكتب على الصورة:

نضرب الطرفين بالوسطين:

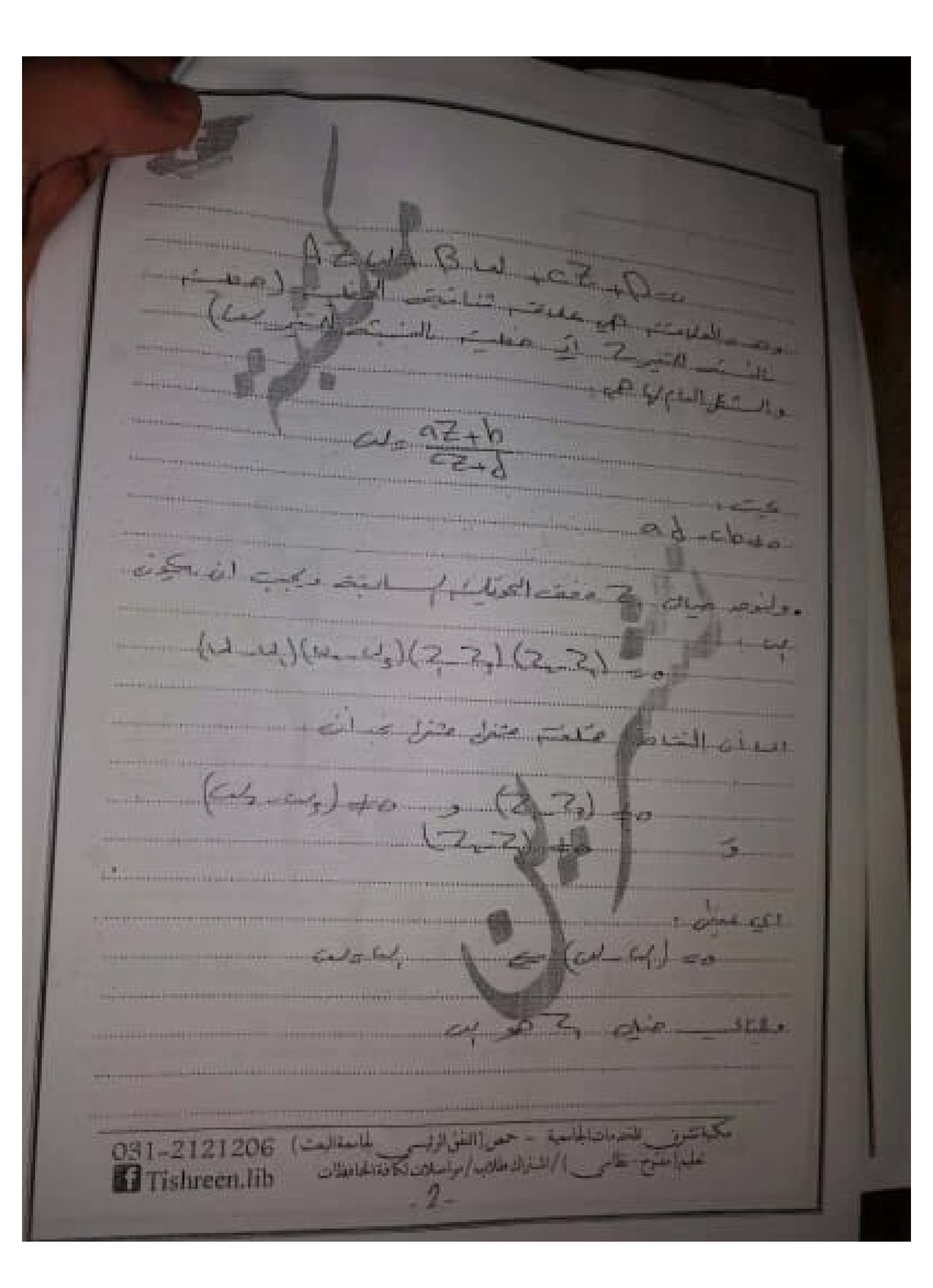
$$\Rightarrow (w-w_1)(w_3-w_2)(z-z_2)(z_3-z_1) = (w-w_2)(w_3-w_1)(z-z_1)(z_3-z_2)$$

وهذه العلاقة تكتب بالشكل العام على النحو التالي:

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206

تعليم مفتوح - عام / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



$AZw + Bw + CZ + D = 0$

وهذه العلاقة هي علاقة ثنائية الخطية (أو معادلة) بالنسبة للمتغير Z أي خطية بالنسبة [illegible] (أيضاً)

والشكل العام لها هو:

$$w = \frac{aZ+b}{cZ+d}$$

حيث:

$ad - bc \neq 0$

ولنوجد [illegible] Z في التحويل السابق يجب أن يكون

بـ: $= (Z-Z_1)(Z_2-Z_3)(w_3-w_2)(w_1-w_2)$

الحالات الشاذة: علاقة مختزلة عندما

$(Z_1 - Z_3) \neq 0$ و $(w_3 - w_1) \neq 0$

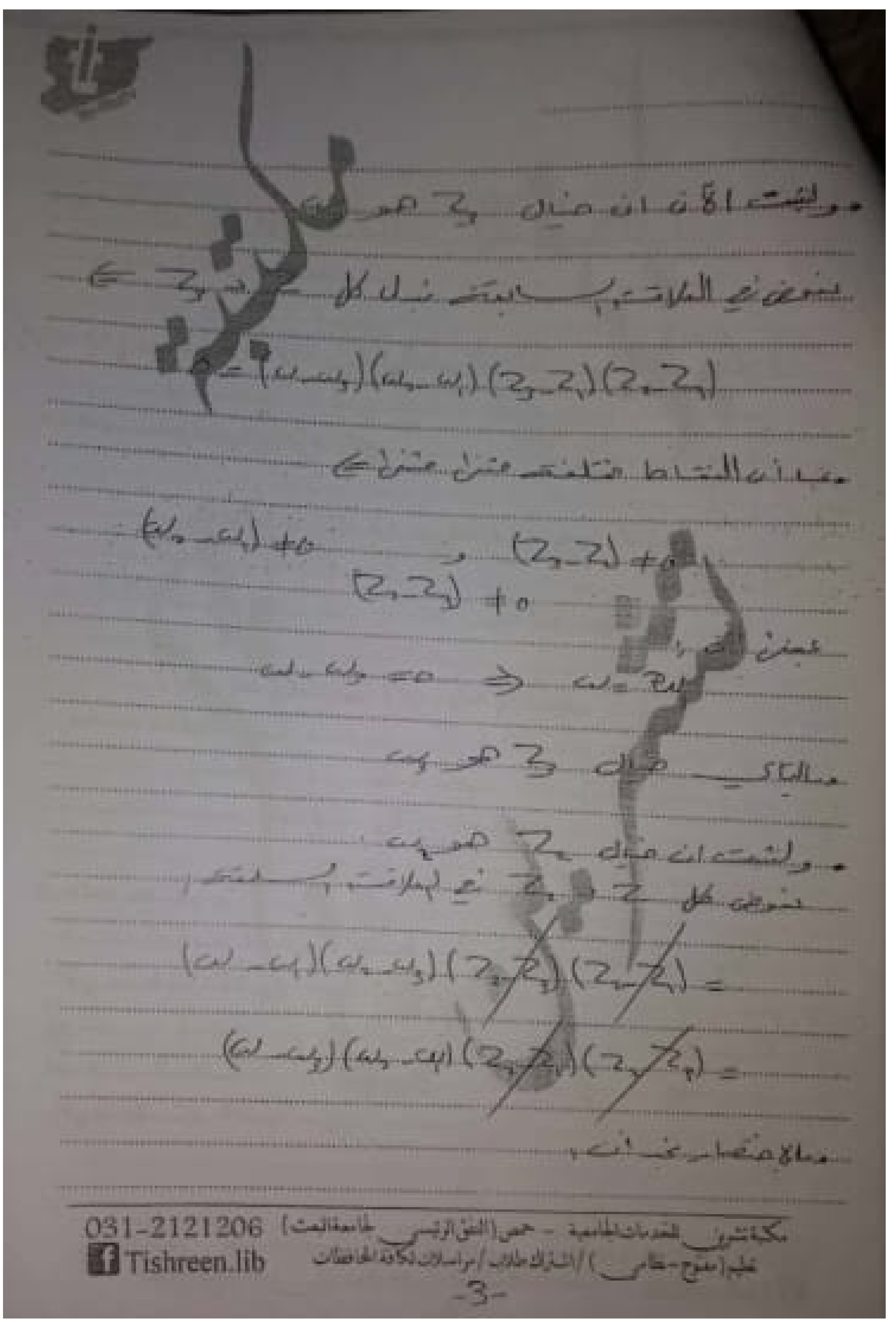
و $(Z_1 - Z_2) \neq 0$

أي عندما:

$(w_1 - w_2) = \infty$ بالتحويل

مثال: [illegible] Z [illegible]

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حرم الثقافي الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
Tishreen.lib



• ولنثبت الآن أنه مثال Z_4 هو

نعوض في العلاقة السابقة بدلاً من Z_4 ⇐

$0 = (\omega_3-\omega_4)(\omega_2-\omega_1)(Z_3-Z_1)(Z_2-Z_4)$

• بما أن النقاط مختلفة فإن ⇐

$(Z_3-Z_1) \neq 0$ و $(\omega_2-\omega_1) \neq 0$

$(Z_2-Z_4) \neq 0$

نجد أن:

$\omega_3-\omega_4 = 0 \Rightarrow \omega_4 = \omega_3$

• بالتالي مثال Z_4 هو ω_4

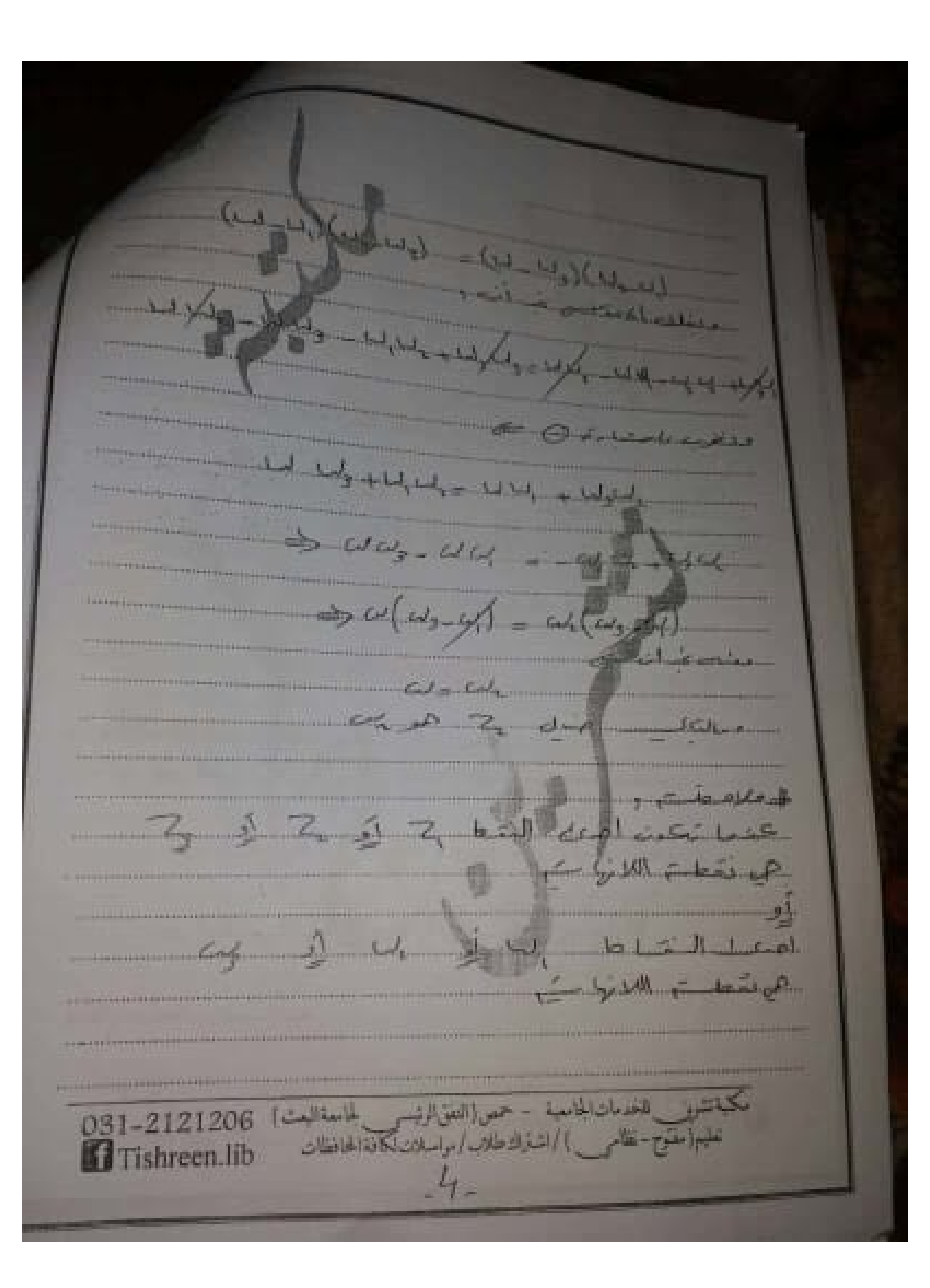
• ولنثبت أن مثال Z_5 هو ω_5

نعوض كل Z و Z_5 في العلاقة السابقة ،

$(\omega-\omega_1)(\omega_2-\omega_3)(Z_3-Z_1)(Z_2-Z) =$

$(\omega_5-\omega_1)(\omega_2-\omega_3)(Z_3-Z_1)(Z_2-Z_5) =$

• بالاختصار نجد أن:



[illegible]

[illegible]

$\Rightarrow w w_3 - w w_1 = $ [illegible]

$\Rightarrow w(w_3 - w_1) = w_2(w_3 - w_1)$

[illegible]

$w = w_2$

[illegible] z_2 [illegible]

ملاحظة:

عندما تكون إحدى النقاط z_1 أو z_2 أو z_3

هي نقطة اللانهاية

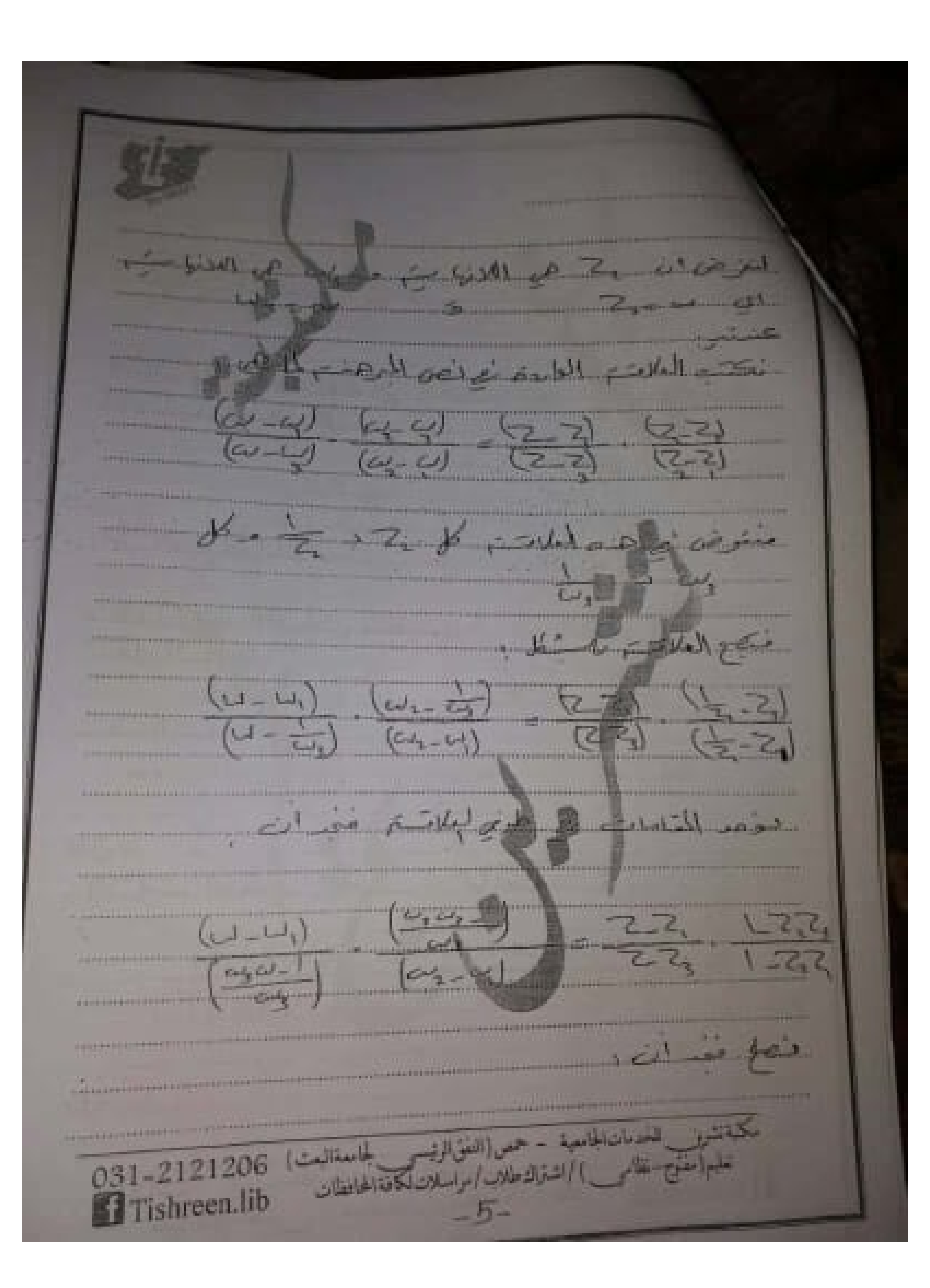
أو

إحدى النقاط w_1 أو w_2 أو w_3

هي نقطة اللانهاية

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي - جامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



لنفرض أن z_3 هي الأعداد التي ... في المستوي [illegible]
التي ... Z و ... صورها

عندئذٍ:
نكتب العلاقة العامة في نص المبرهنة بالشكل:

$$\frac{(w-w_1)}{(w-w_3)}\cdot\frac{(w_2-w_3)}{(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}\cdot\frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}$$

نفرض في هذه العلاقة كل $z_3 \to \frac{1}{z_3}$ وكل $w_3 \to \frac{1}{w_3}$

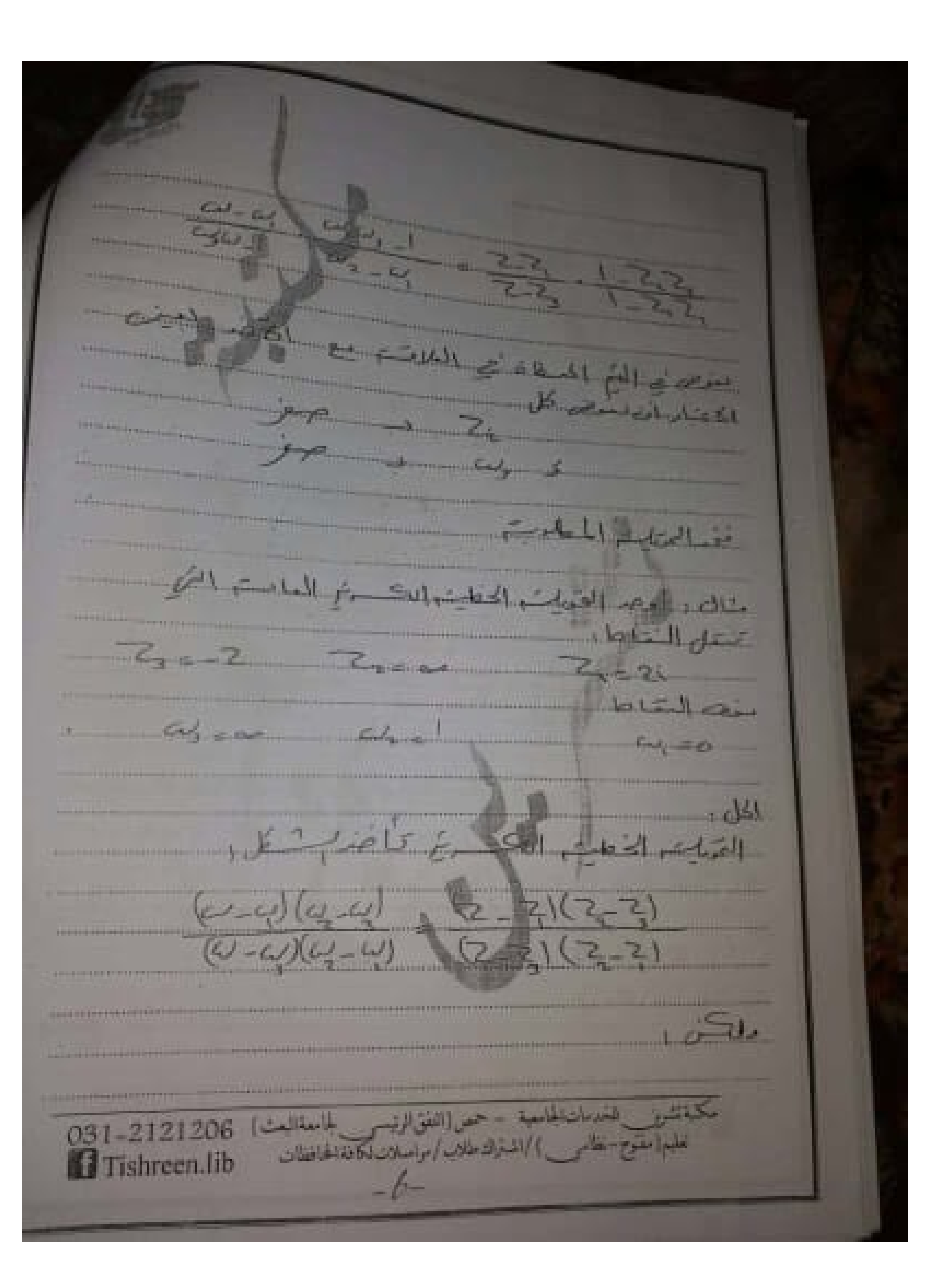
فتصبح العلاقة بالشكل:

$$\frac{(w-w_1)}{\left(w-\frac{1}{w_3}\right)}\cdot\frac{\left(w_2-\frac{1}{w_3}\right)}{(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}\cdot\frac{\left(\frac{1}{z_3}-z_2\right)}{\left(\frac{1}{z_3}-z_1\right)}$$

نوحد المقامات في طرفي العلاقة فنجد أن:

$$\frac{(w-w_1)}{\left(\frac{w w_3-1}{w_3}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{w_2 w_3-1}{w_3}\right)}{(w_2-w_1)}=\frac{z-z_1}{z z_3}\cdot\frac{1-z_2 z_3}{1-z_1 z_3}$$

فنجد أن:



$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{1-z_3/z_2}{1-z_1/z_2}$$

نعوض في الحد المطلوب في العلاقة مع

الكشف الذي يكون الحل

$z_i \leftarrow$ صفر

$w_i \leftarrow$ صفر

تحويلات المطلوبة

مثال: أوجد التحويل الخطي الكسري الذي ينقل النقاط:

$z_1 = 2i$ $\quad z_2 = \infty$ $\quad z_3 = -2$

إلى النقاط

$w_1 = i$ $\quad w_2 = 1$ $\quad w_3 = \infty$

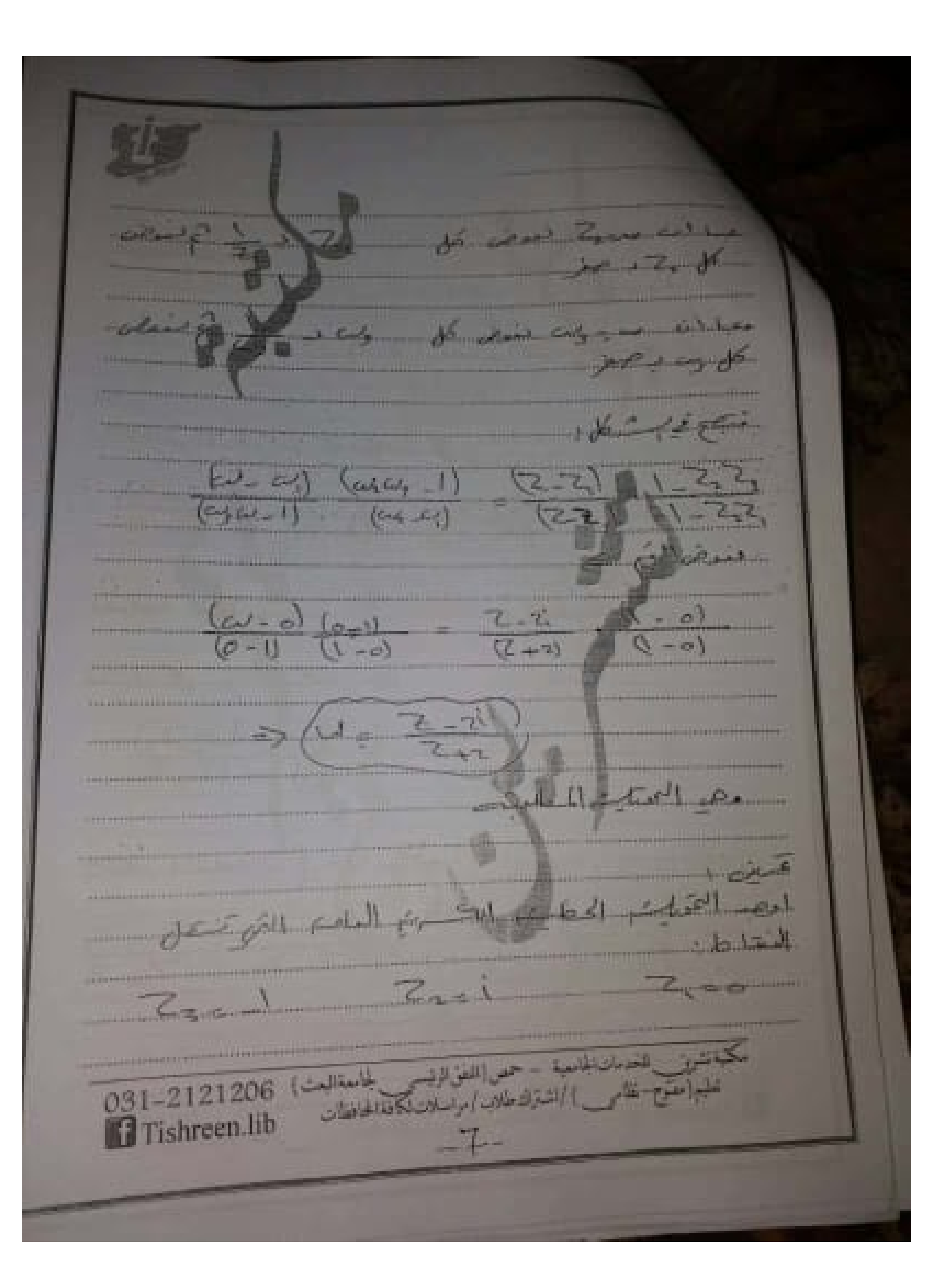
الحل:

التحويل الخطي الكسري يأخذ الشكل:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

ولكن:

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص / النفق الرئيسي لجامعة البعث 031-2121206
تعليم مفتوح - نظامي / اشتراكات طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
Tishreen.lib



عندما تكون مسحوبة لمضاعف كل ... $\frac{1}{z}$ ...
كل z_0 = صفر

عندما ... مسحوبة لمضاعف كل ... $\frac{1}{z}$ ...
كل ... = صفر

نعوض في الشكل:

$$\frac{(w-w_1)}{(w_3 w-1)} \cdot \frac{(w_2 w_3 - 1)}{(w_2 - w_1)} = \frac{(z-z_1)}{(z-z_2)} \cdot \frac{1 - z_2 z_3}{1 - z_1 z_3}$$

نعوض القيم

$$\frac{(w-0)}{(0-1)} \cdot \frac{(-1)}{(1-0)} = \frac{z-i}{(z+i)} \cdot \frac{(1-0)}{(1-0)}$$

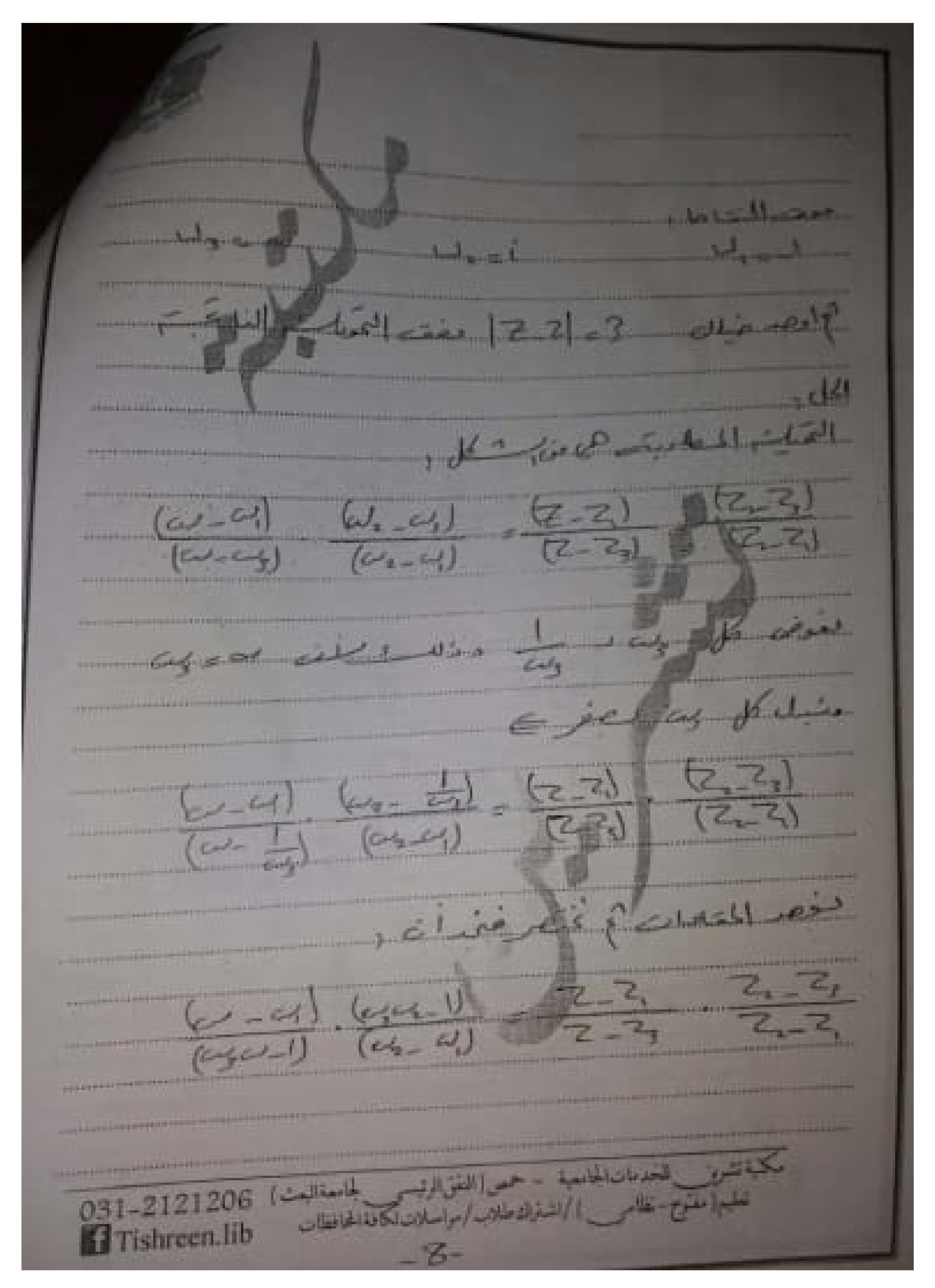
$$\Rightarrow w = \frac{z-i}{z+i}$$

وهو التحويل المطلوب

تمرين:
أوجد التحويل الخطي الكسري العام الذي يحول النقاط:

$z_1 = 0$ $z_2 = i$ $z_3 = -1$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص الملعب الرئيسي - جامعة البعث
تعليم مفتوح - نظامي / اشتراكات / مراسلات لكافة المحافظات
031-2121206
Tishreen.lib



عكس التناظر:

[illegible] أن [illegible]

ثم أوجد مثال $|z-z|=3$ وفق التحويل [illegible]

الحل:

التحويل المطلوب يعطى بالشكل:

$$\frac{(w-w_1)}{(w-w_3)}\cdot\frac{(w_2-w_1)}{(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}\cdot\frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}$$

نعوض كل w_3 بـ $\frac{1}{w_3}$ وذلك [illegible] w_3

ويقابل كل [illegible] صفر ⇐

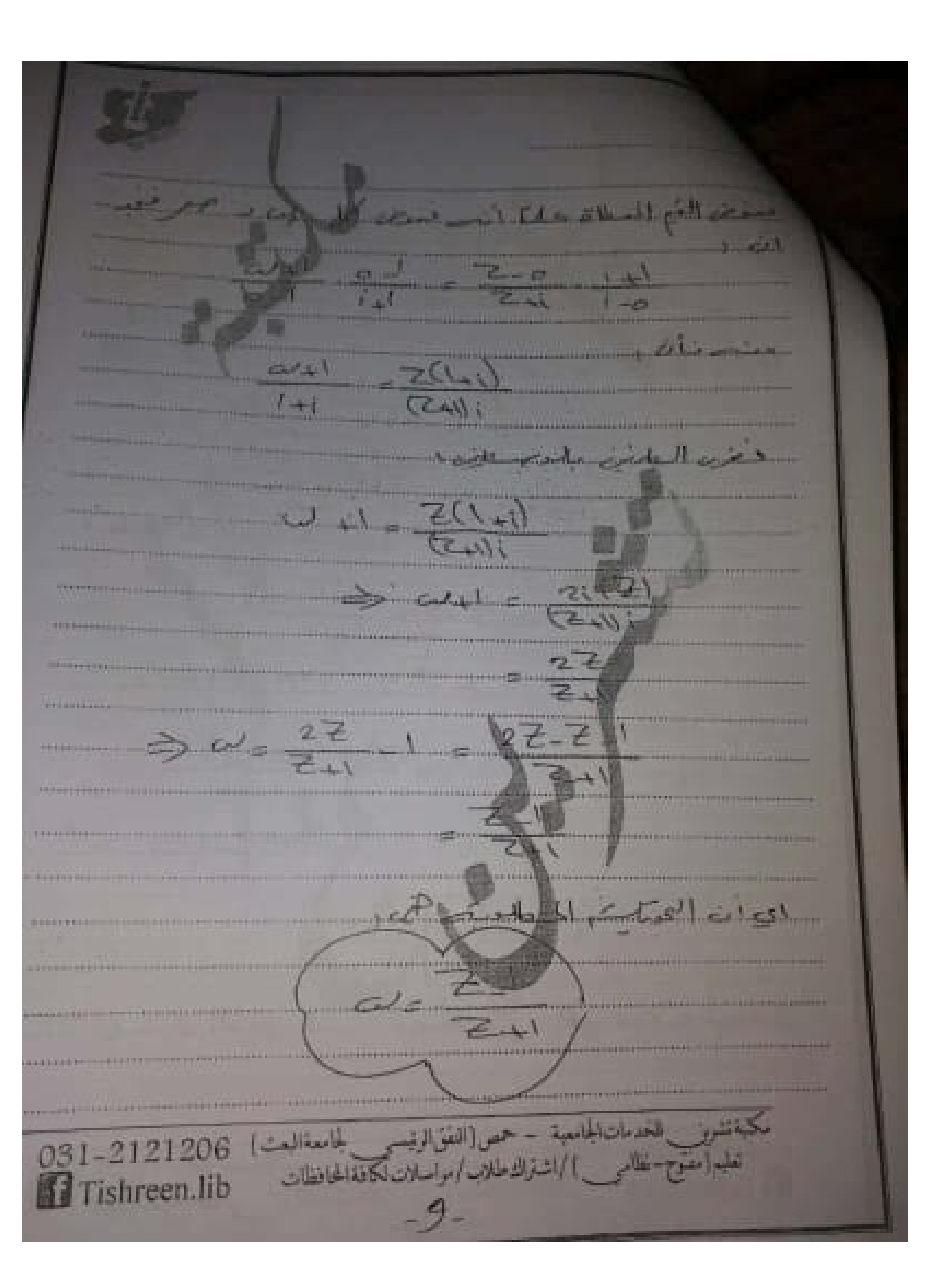
$$\frac{(w-w_1)}{\left(w-\frac{1}{w_3}\right)}\cdot\frac{\left(w_2-\frac{1}{w_3}\right)}{(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}\cdot\frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}$$

نوحد المقامات ثم نختصر فنجد أن:

$$\frac{(w-w_1)}{(w w_3-1)}\cdot\frac{(w_2 w_3-1)}{(w_2-w_1)}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص/ النفق الرئيسي لجامعة البعث
تعليم مفتوح - نظامي / اشتراكات طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
031-2121206
Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



نعوض القيم المطابقة علماً أننا نعوض ... في العلاقة :

[illegible]

نختصر فنجد :

$$\frac{Z(1+i)}{(1+Z)i} = \frac{1+w}{1+1}$$

نضرب الطرفين بالمضروب :

$$\frac{Z(1+i)}{(1+Z)i} = 1+w$$

$$\Rightarrow 1+w = \frac{2iZ}{i(Z+1)}$$

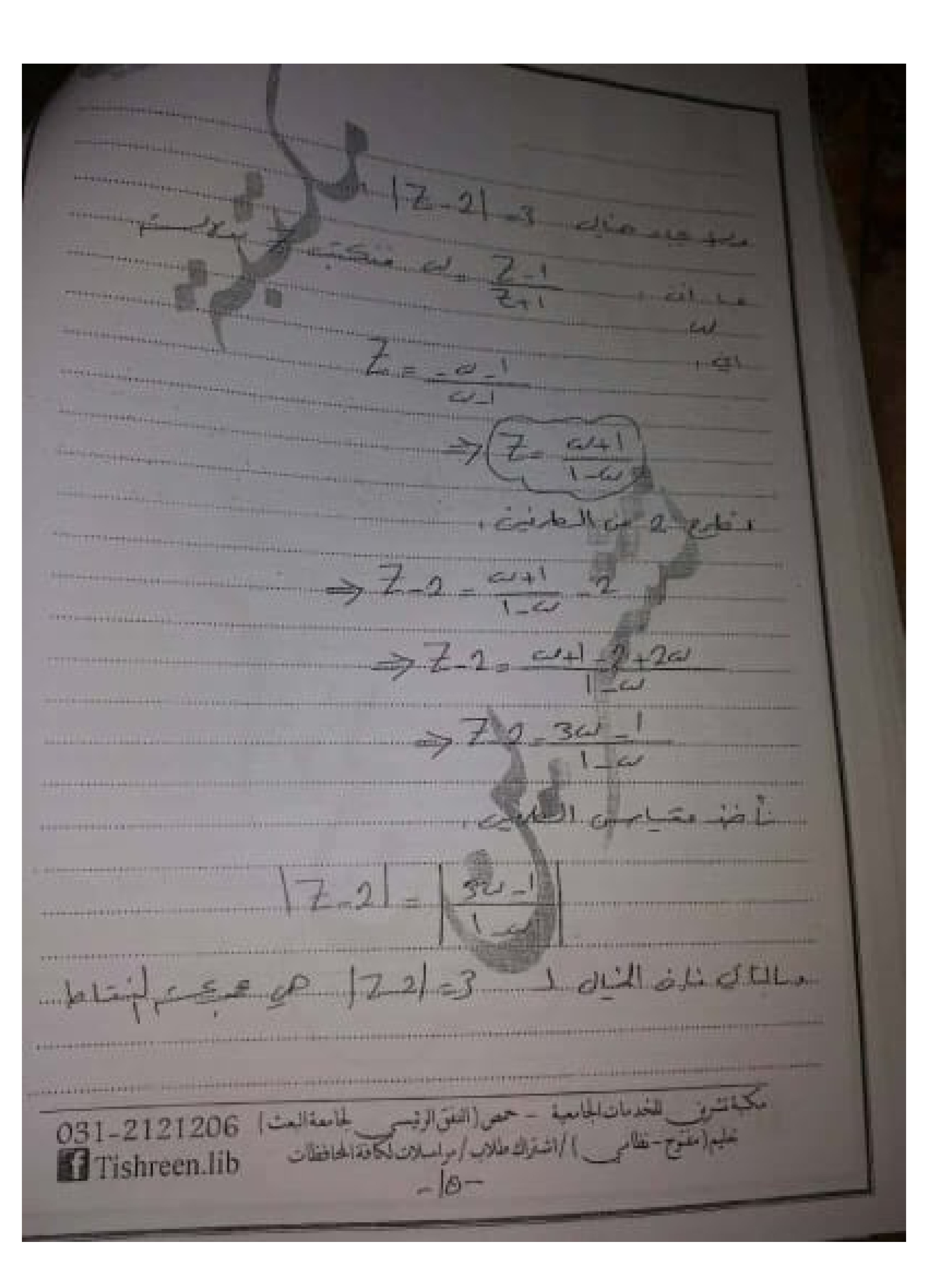
$$= \frac{2Z}{Z+1}$$

$$\Rightarrow w = \frac{2Z}{Z+1} - 1 = \frac{2Z-Z-1}{Z+1}$$

$$= \frac{Z-1}{Z+1}$$

اي ان التحويل المطلوب هو :

$$w = \frac{Z-1}{Z+1}$$



[illegible] $|Z-2| = 3$ [illegible]

[illegible] $w = \frac{Z-1}{Z+1}$ [illegible]

$Z = \frac{-w-1}{w-1}$

$\Rightarrow Z = \frac{w+1}{1-w}$

نطرح 2 من الطرفين:

$\Rightarrow Z-2 = \frac{w+1}{1-w} - 2$

$\Rightarrow Z-2 = \frac{w+1-2+2w}{1-w}$

$\Rightarrow Z-2 = \frac{3w-1}{1-w}$

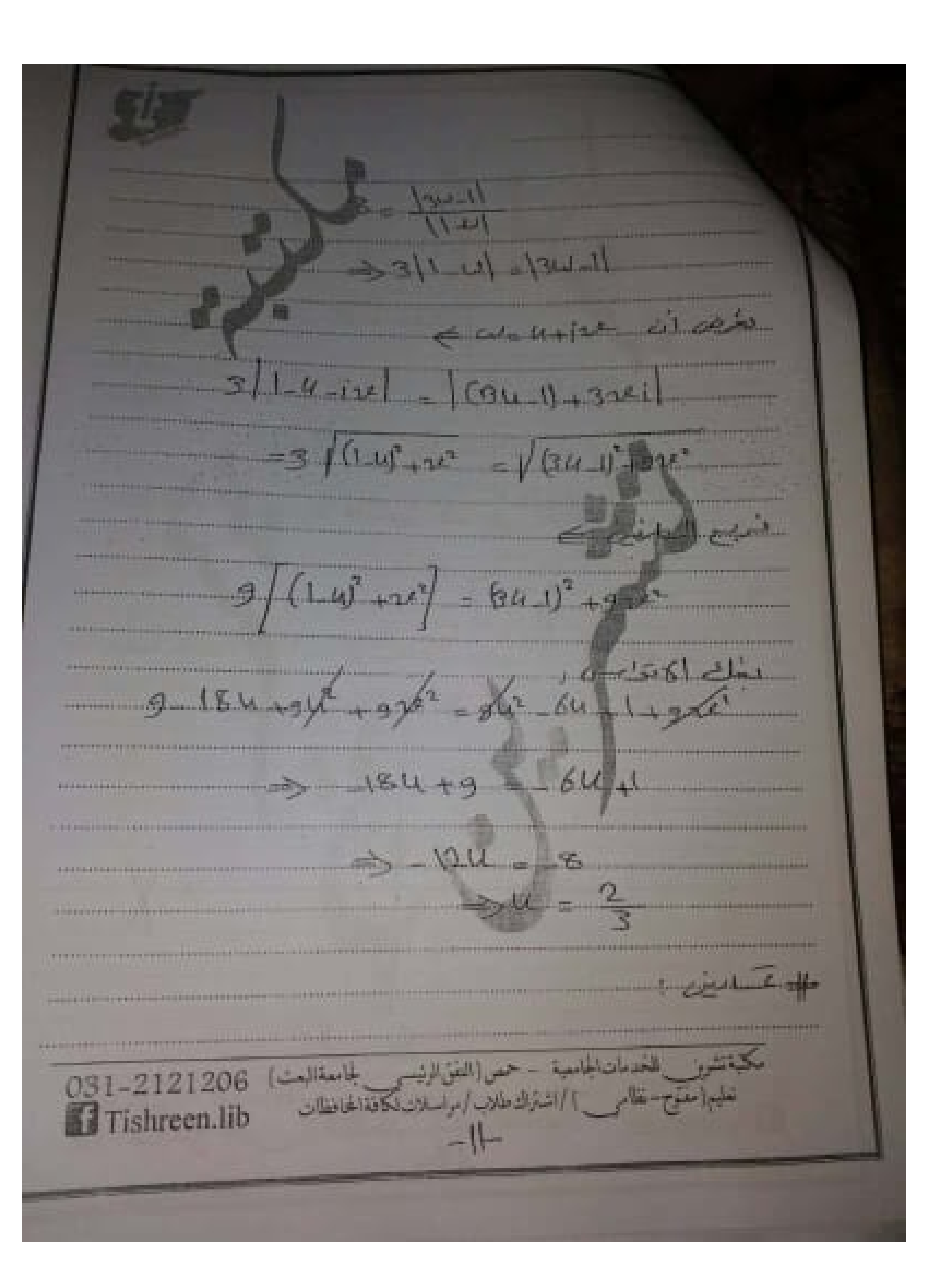
نأخذ مقياس الطرفين:

$|Z-2| = \left|\frac{3w-1}{1-w}\right|$

ما [illegible] المثال لـ $|Z-2| = 3$ هي مجموعة النقاط

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي) جامعة البعث | 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



$= \frac{|3u-1|}{|1-u|}$

$\Rightarrow 3|1-u| = |3u-1|$

نفرض أن $u = u + i z$ ←

$3|1-u-iz| = |(3u-1)+3zi|$

$= 3\sqrt{(1-u)^2+z^2} = \sqrt{(3u-1)^2+9z^2}$

نربع الطرفين

$9[(1-u)^2+z^2] = (3u-1)^2+9z^2$

نفك الأقواس و نختصر

$9-18u+9u^2+9z^2 = 9u^2-6u+1+9z^2$

$\Rightarrow -18u+9 = -6u+1$

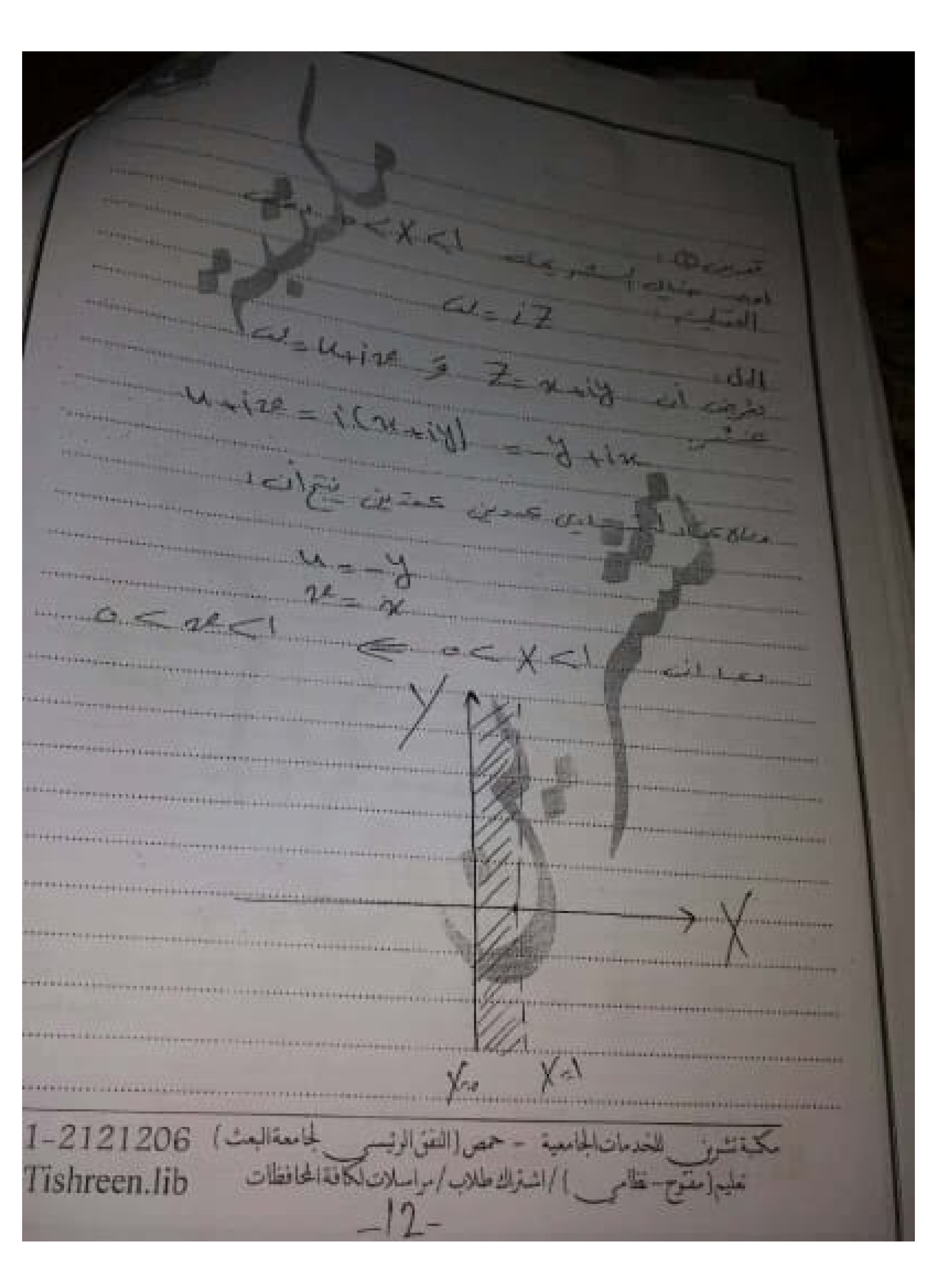
$\Rightarrow -12u = -8$

$\Rightarrow u = \frac{2}{3}$

تمارين :

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



تمرين ③: أوجد صورة المستطيل $0<x<1$ بالتطبيق $w = iz$

الحل: نفرض أن $z = x+iy$ و $w = u+iv$

نعوض: $u+iv = i(x+iy) = -y+ix$

بمطابقة الجزأين الحقيقي والتخيلي نجد أن:

$u = -y$

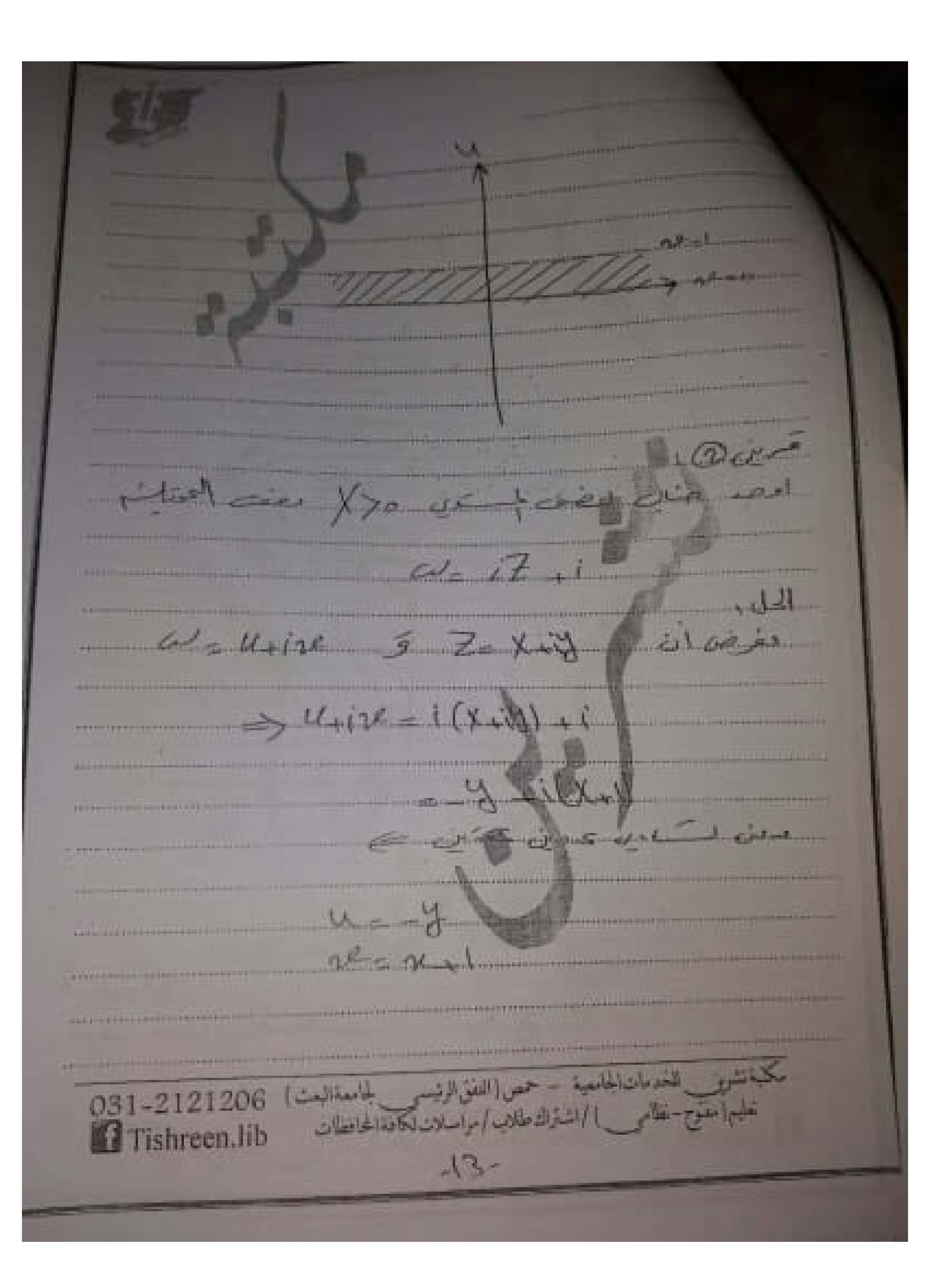
$v = x$

بما أن $0<x<1 \Leftarrow 0<v<1$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 2121206-1

تعليم (مفتوح-نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



تمرين ②

أوجد صورة نصف المستوي $x>0$ تحت التطبيق

$w = iZ + i$

الحل:

نفرض أنه $Z = x+iy$ و $w = u+iv$

$\Rightarrow u+iv = i(x+iy) + i$

$= -y + i(x+1)$

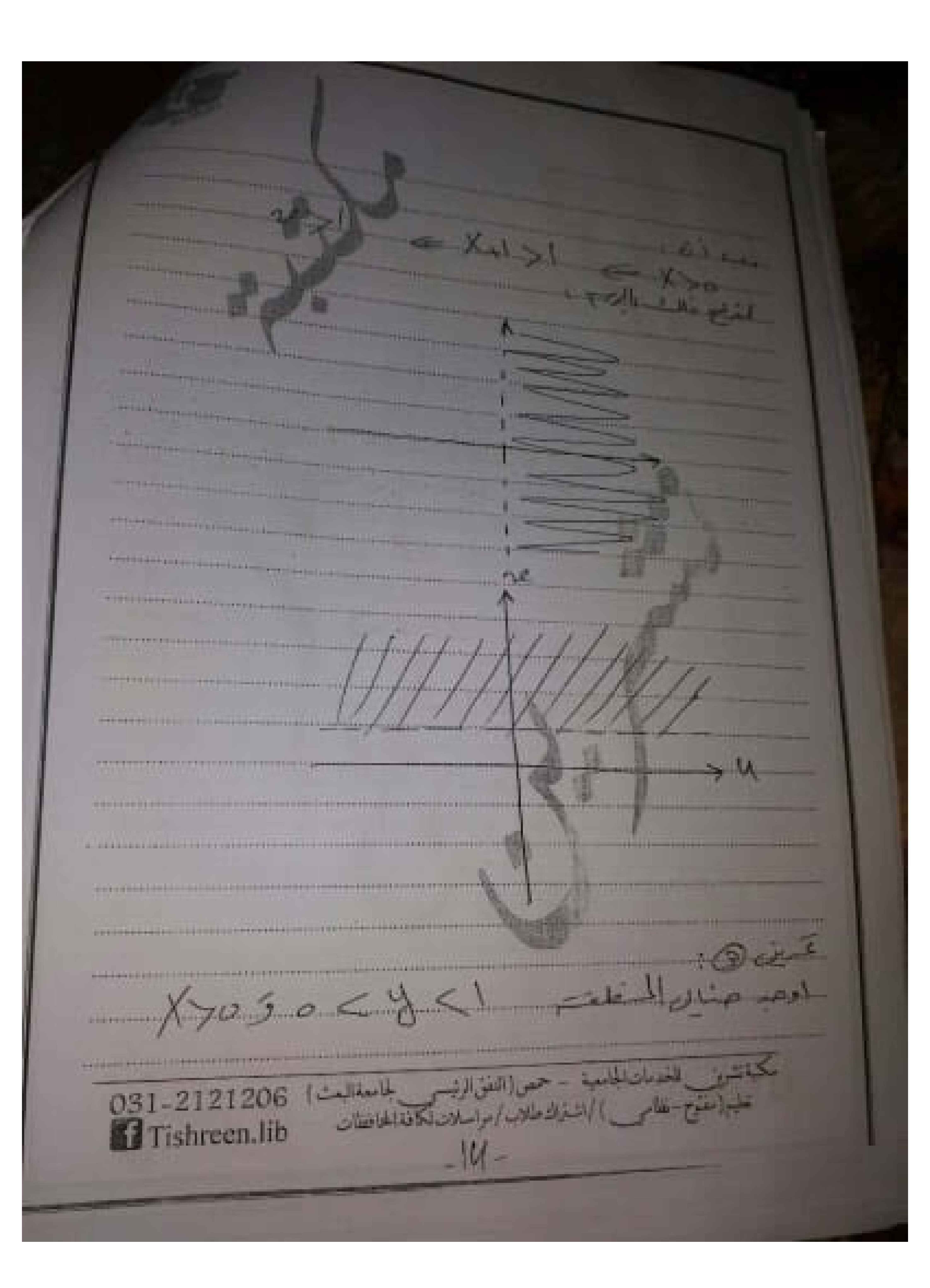
بمطابقة الحد الحقيقي والتخيلي ⇐

$u = -y$

$v = x+1$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
Tishreen.lib

Scanned by CamScanner

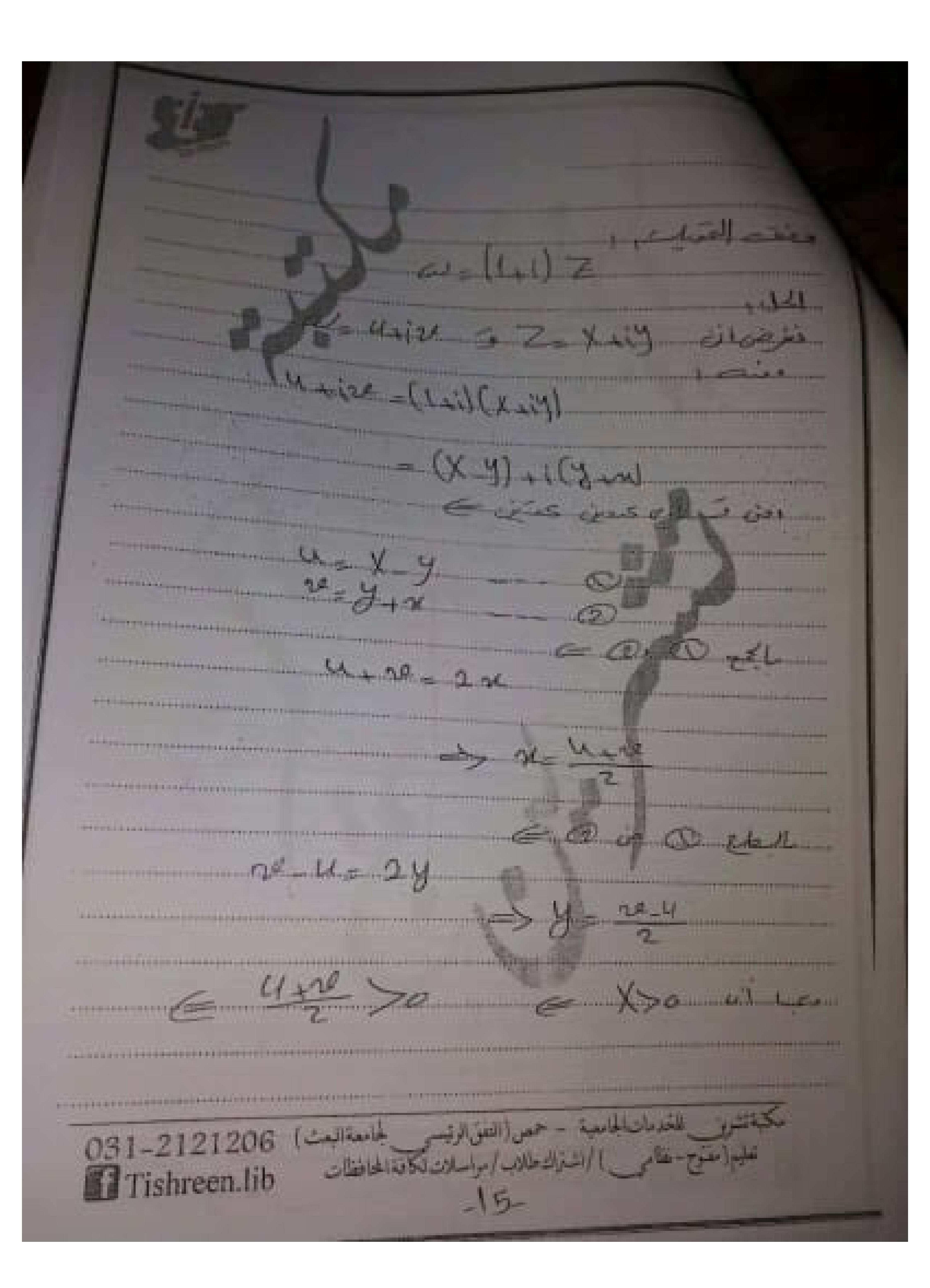


تمرين ③ :

اوجد حلول المتراجحة $X>0$ و $0<y<1$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث)
طلب (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
031-2121206
Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



معطى التطبيق: $w = (1+i)z$

الحل:

نفرض أن $w = u + iv$ و $z = x + iy$

فيصبح:

$$u + iv = (1+i)(x+iy)$$

$$= (x-y) + i(y+x)$$

ومن تساوي عددين عقديين ⇐

$$u = x - y \quad \text{--- ①}$$
$$v = y + x \quad \text{--- ②}$$

بالجمع ① و ② ⇐

$$u + v = 2x$$

$$\Rightarrow x = \frac{u+v}{2}$$

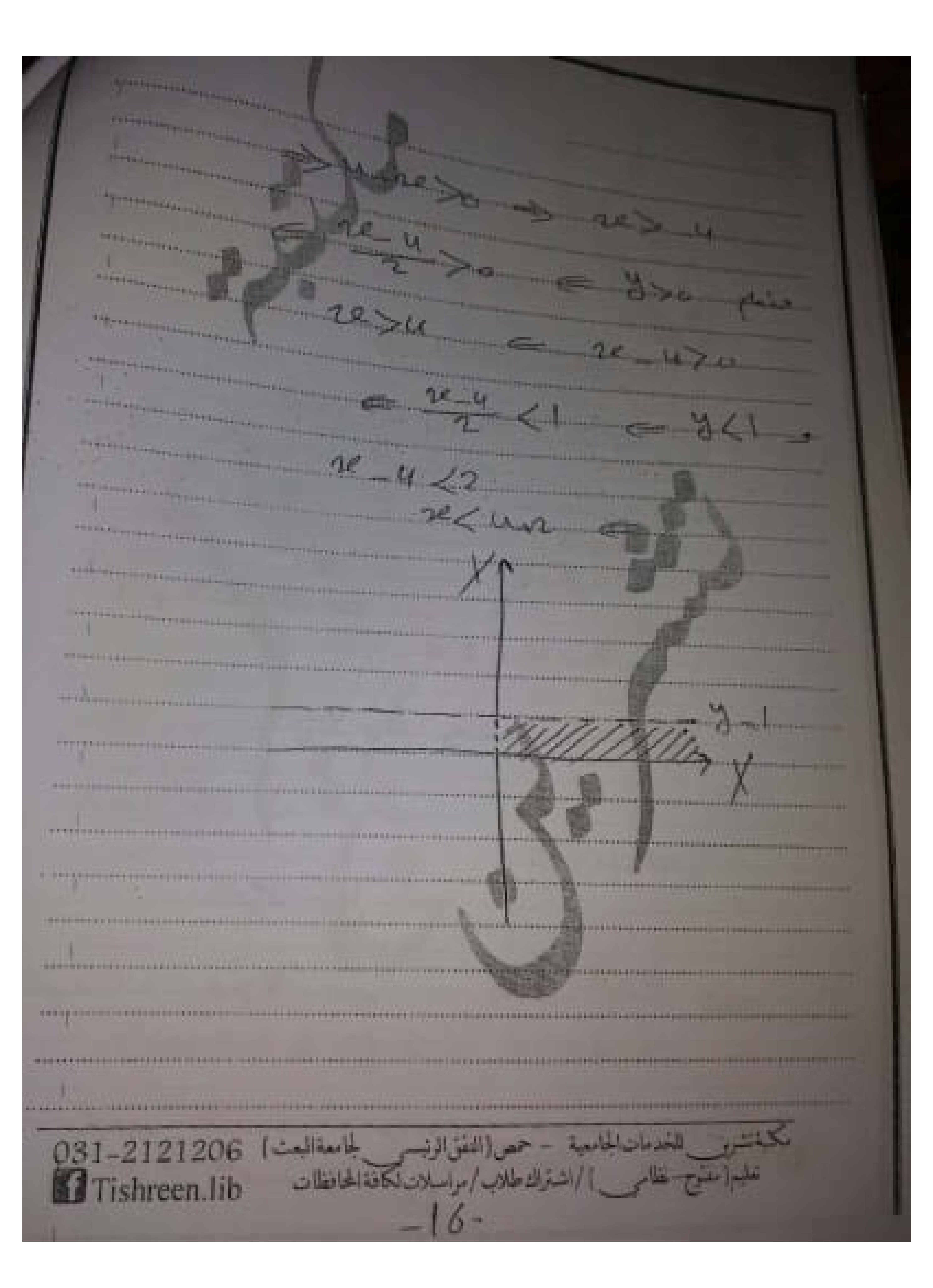
بالطرح ② من ① ⇐

$$v - u = 2y$$

$$\Rightarrow y = \frac{v-u}{2}$$

وبما أنه $x > 0$ ⇐ $\frac{u+v}{2} > 0$ ⇐

Scanned by CamScanner


⇒ [illegible] $x>0 \Rightarrow x>4$

منه $y>0 \Leftarrow \frac{x-4}{2}>0 \Leftarrow$

$x>4 \Leftarrow x-4>0$

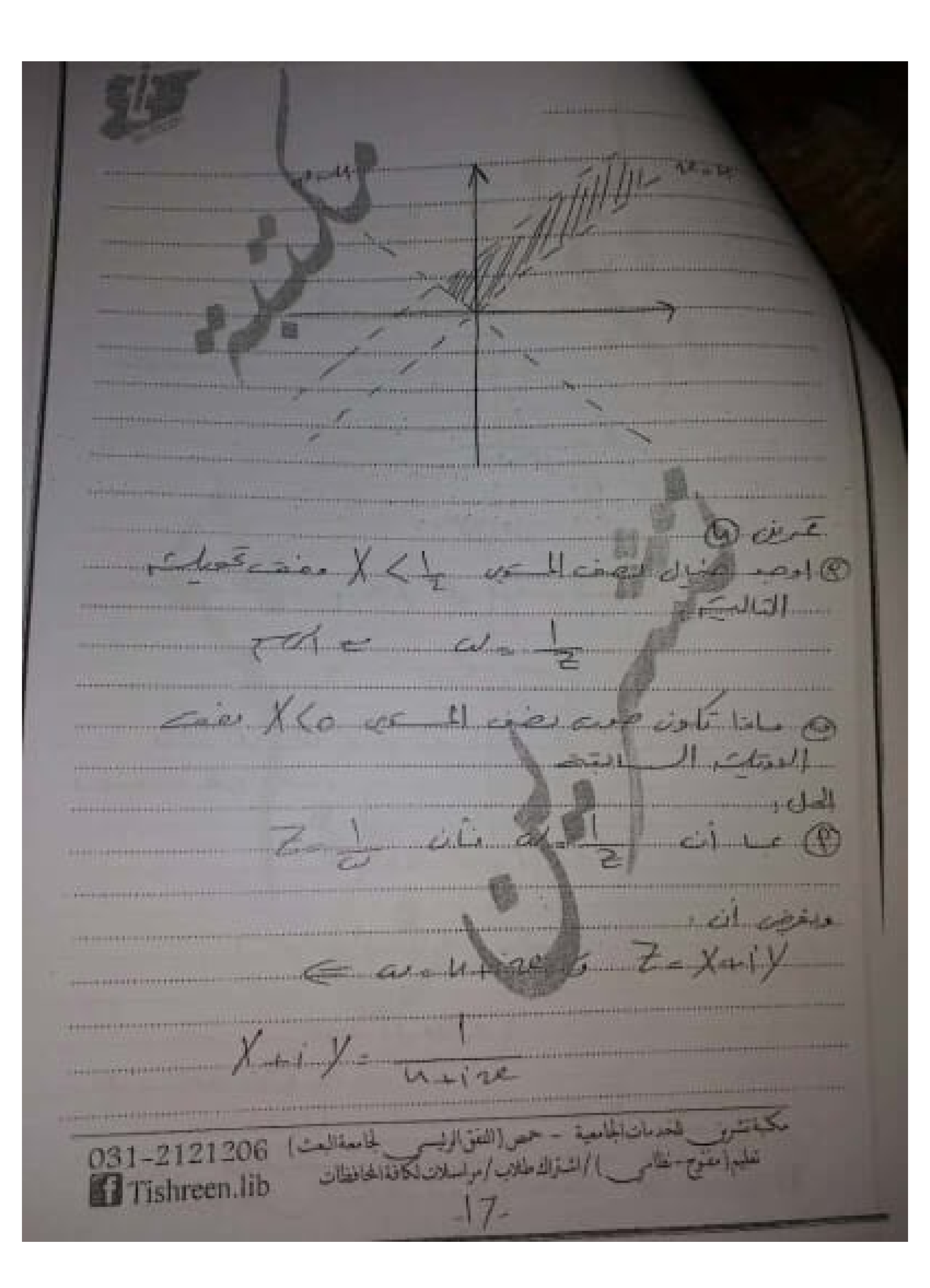
و $y<1 \Leftarrow \frac{x-4}{2}<1 \Leftarrow$

$x-4<2$

$x<4+2 \Leftarrow$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الزراعي) لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح-نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



تمرين ⑧

④ اوجد صورة نصف المستوي $X < \frac{1}{2}$ وفق تحويلة التالية

$\frac{1}{z} = w$ ⇐ الحل

⑤ ماذا تكون صورة نصف المستوي $X < 0$ وفق العملية السابقة

الحل:

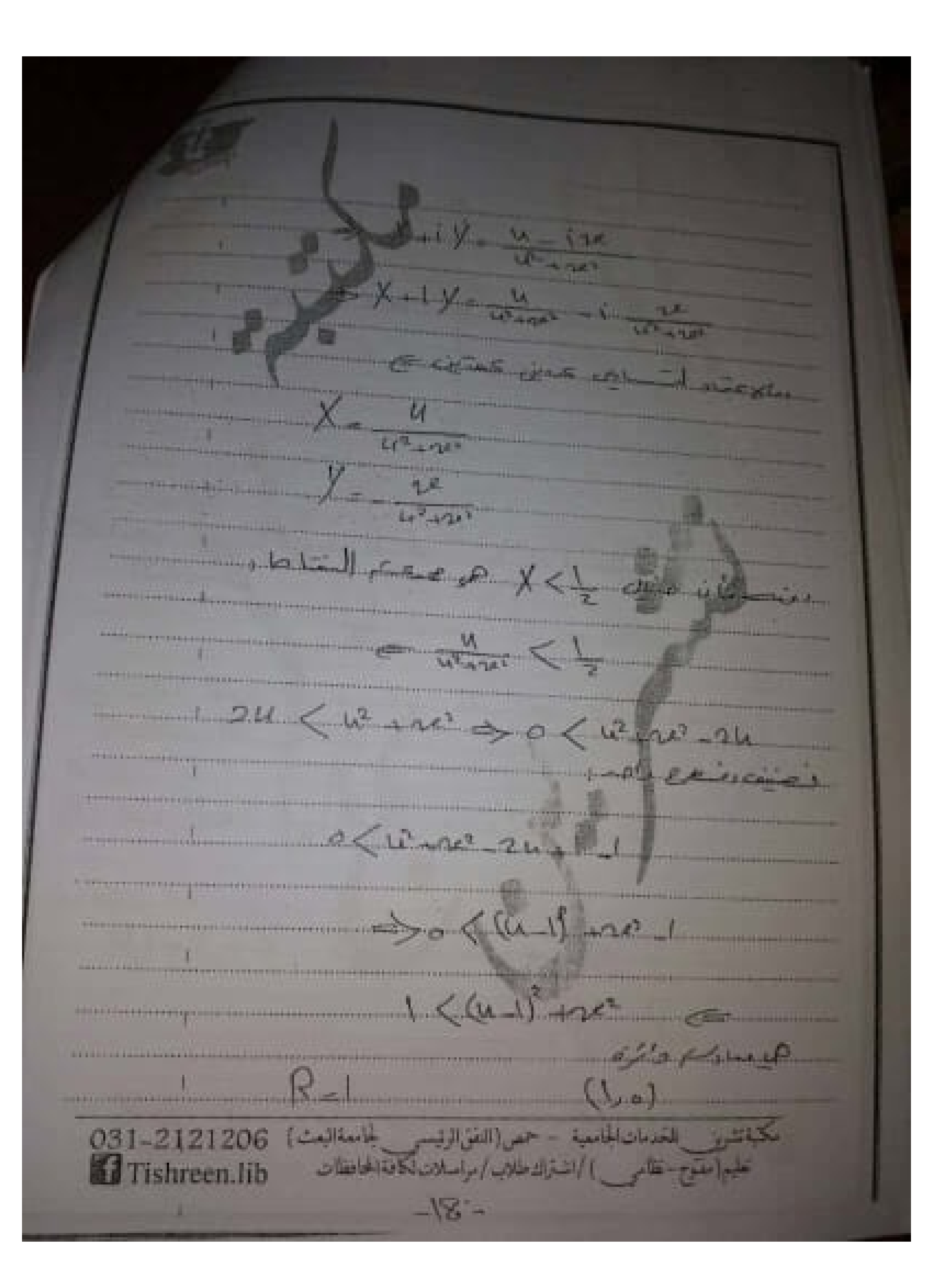
④ بما أن $\omega = \frac{1}{z}$ فإن $z = \frac{1}{\omega}$

ونفرض أن:

$Z = X + iY$ و $\omega = u + iv \Leftarrow$

$$X + iY = \frac{1}{u + iv}$$

Scanned by CamScanner



$\Rightarrow x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$

$\Rightarrow x + iy = \frac{u}{u^2 + v^2} - i\frac{v}{u^2 + v^2}$

بمطابقة [illegible] $\Leftarrow$

$x = \frac{u}{u^2 + v^2}$

$y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$

[illegible] $x < \frac{1}{2}$ هي [illegible]

$\Leftarrow \frac{u}{u^2 + v^2} < \frac{1}{2}$

$2u < u^2 + v^2 \Rightarrow 0 < u^2 + v^2 - 2u$

نضيف ونطرح واحد

$0 < u^2 + v^2 - 2u + 1 - 1$

$\Rightarrow 0 < (u-1)^2 + v^2 - 1$

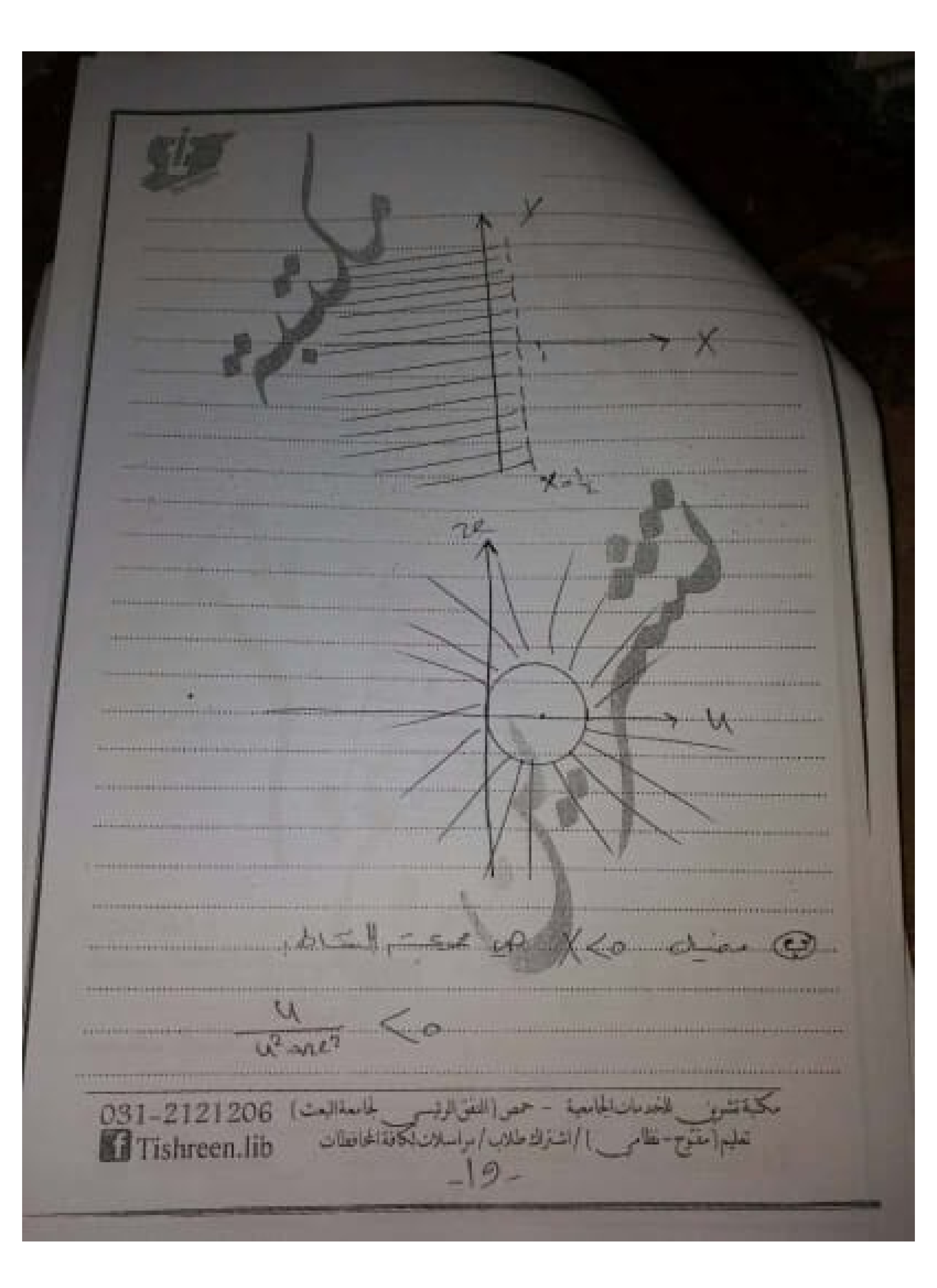
$\Leftarrow 1 < (u-1)^2 + v^2$

هي معادلة دائرة

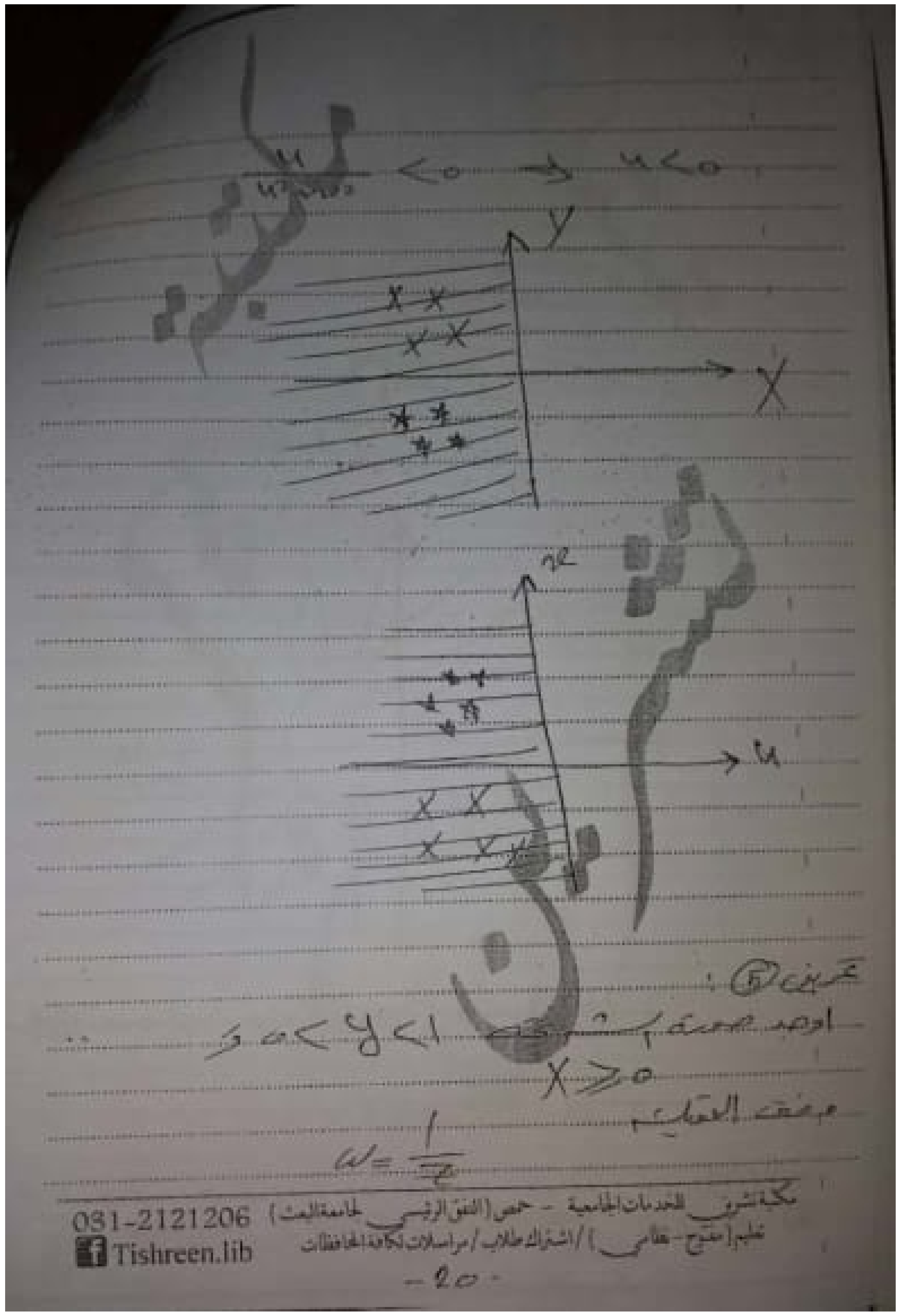
$(1,0)$ $R = 1$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



Scanned by CamScanner



تمرين (5):

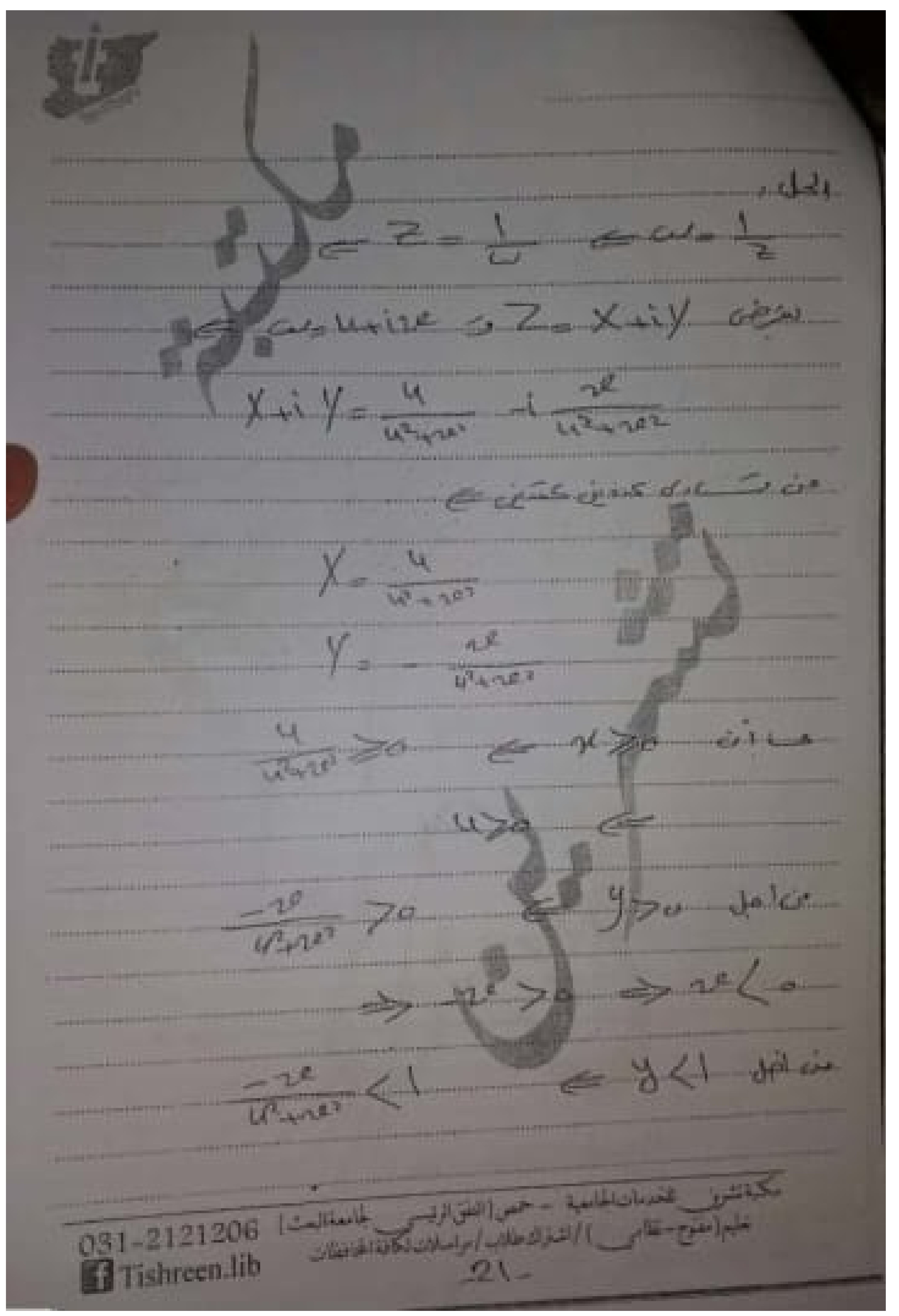
اوجد صورة شريحة $1 < y < 2$ و $x \geq 0$

وفق التطبيق

$w = \frac{1}{z}$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث)
تعليم (مفتوح - عام) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
031-2121206
Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



الحل:

$w = \frac{1}{z} \Leftarrow z = \frac{1}{w} \Leftarrow$

نفرض $Z = X + iY$ و $w = u + iv$ فيكون $\Leftarrow$

$X + iY = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$

من تساوي عددين عقديين $\Leftarrow$

$X = \frac{u}{u^2+v^2}$

$Y = -\frac{v}{u^2+v^2}$

بما أن $x \geq 0 \Leftarrow \frac{u}{u^2+v^2} \geq 0$

$\Leftarrow u \geq 0$

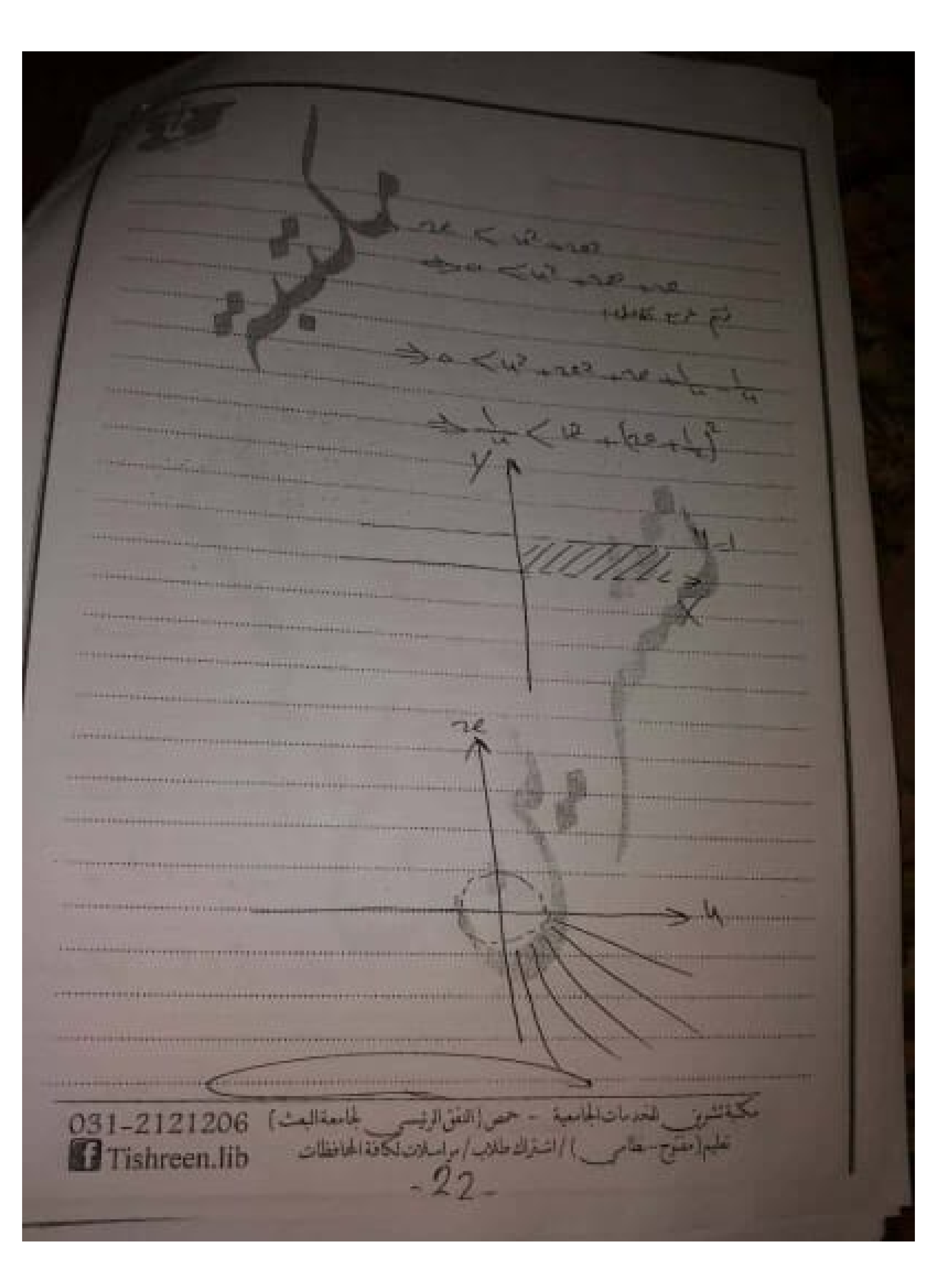
من أجل $y > 0 \Leftarrow \frac{-v}{u^2+v^2} > 0$

$\Rightarrow -v > 0 \Rightarrow v < 0$

من أجل $y < 1 \Leftarrow \frac{-v}{u^2+v^2} < 1$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص الفرن الرئيسي - جامعة البعث
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة الاختصاصات
031-2121206
Tishreen.lib

Scanned by CamScanner


031-2121206
Tishreen.lib
-22-